Problemas de Análise Matemática III

Departamento de Engenharia Química

Porto, Setembro de 1998

Este documento contem os problemas seleccionados para as aulas práticas e trabalho de casa da disciplina de Análise Matemática III, no primeiro semestre do ano lectivo 1998/99.

A maior parte dos problemas foram propostos pelo Prof. Mário Rui Costa e usados em anos anteriores; algumas modificações tiveram que ser introduzidas devido à adopção dum novo texto guia: *An Introduction to Differential Equations and Their Applications*, S.J. Farlow, McGraw-Hill, 1994, do qual provêm quase todas as alterações aos problemas dos anos anteriores.

Alguns dos problemas serão resolvidos nas aulas práticas e espera-se que os restantes sejam resolvidos pelos alunos como trabalho de casa. A avaliação contínua e o exame final tentarão reproduzir, na medida do possível, o grau de dificuldade e os temas destes problemas.

Jaime Villate, DEQ-FEUP

1 Soluções das equações diferenciais. Existência e unicidade

Em cada equação diferencial identifique as variáveis independentes e dependentes. Demonstre em cada caso que a função y ou u na coluna da direita é solução da equação, onde a e c são constantes.

1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad (a \neq 0)$ $\qquad y(x) = \sqrt{x^2+a^2}$

2. $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 - x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 1 - x^2$ $\qquad y(x) = x^2$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $\qquad u(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ $\qquad u(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Demonstre que a relação dada define uma solução implícita da equação diferencial.

5. $yy' = \mathrm{e}^{2x}$ $\qquad y^2 = \mathrm{e}^{2x}$

6. $y' = \dfrac{y^2}{xy - x^2}$ $\qquad y = c\,\mathrm{e}^{y/x}$

Os problemas 7 ao 11 são um teste à sua intuição (a «intuição» só se obtem depois de alguma prática e por isso é importante analizar estes problemas e as suas soluções). Em cada caso tente adivinhar uma solução; faça alguma tentativa e verifique se é ou não solução. Diga se a solução que descobriu é geral ou particular.

7. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$ $\qquad$ (a função cuja derivada é igual a si própria)

8. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2$ $\qquad$ (derivada igual ao quadrado da função)

9. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 1$

10. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \mathrm{e}^x$

11. $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 1$ $\qquad$ (função cuja segunda derivada é igual a 1)

Verifique que a função dada é solução do problema de valor inicial

12. $y'' + 3y' + 2y' = 0,$ $\qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$ $\qquad y(x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}$

13. $y'' + 4y = 0,$ $\qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$ $\qquad y(x) = \cos 2x$

Determine se o teorema de Picard implica a existência de uma solução única dos seguintes problemas de valor inicial, numa vizinhança do valor inicial x dado.

14. $y' - y = 1$ $\qquad y(0) = 3$

15. $y' = x^3 - y^3$ $\qquad y(0) = 0$

16. $y' = -\dfrac{x}{y}$ $\qquad y(1) = 0$

17. O problema de valor inicial $y' = 2\sqrt{y}$, $y(0) = 0$, tem um número infinito de soluções no intervalo $[0, \infty)$.

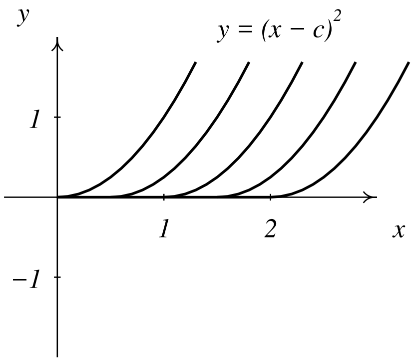
(a) Demonstre que $y(x) = x^2$ é uma solução.

(b) Demonstre que se (c é um parâmetro positivo, a seguinte familia de funções (ver figura) são também soluções

$$y = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < c \\ (x-c)^2 & c \leq x \end{cases}$$

Porque não pode ser c negativo?

(c) Interprete estes resultados em relação ao teorema de Picard.



Soluções

Nos problemas 7 ao 10 existem mais soluções além das apresentadas a continuação, mas estas são as únicas que se espera que um aluno sem conhecimento previo de equações diferenciais descubra

7. $y = \mathrm{e}^x$ **8.** $y = -\dfrac{1}{x}$ **9.** $y = 1$ **10.** $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$

11. $y = c_1 + c_2 x + \dfrac{x^2}{2}$ onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

14. Sim **15.** Sim **16.** Não

17. (a) Demonstra-se por substituição directa e conferindo a condição inicial.

(b) Demonstra-se em forma semelhante à alinha anterior, mas é preciso ter em conta que $\sqrt{a^2} = |a|$.

(c) Em $y = 0$ verificam-se as condições do teorema de Picard, e como podemos ver no gráfico existe solução única em cada caso. Nos pontos $y = 0$ não se verifica a condição de continuidade de $\partial f/\partial y$ e existe um número infinito de soluções. Finalmente, em $y < 0$ não se verifica nenhuma das duas condições e não existem soluções.

2 Equações de primeira ordem

Resolva as seguintes equações diferenciais ordinárias (todas são de variáveis separáveis, exactas, lineares ou redutíveis a elas)

1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cos y = -\dfrac{t\sin y}{1+t^2}$ $\qquad y(1) = \dfrac{\pi}{2}$

2. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 1 + t^2$ $\qquad y(1) = 2$

3. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \cos(x+2y)$ $\qquad x(0) = 0$

4. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{y^2 - 2ty}{y^2}$

5. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x+y}{x+2y}$ $\qquad y(2) = 3$

6. $(2y + \mathrm{e}^x\cos y)y' = -\mathrm{e}^x\sin y$

7. $1 + 3t - 2y - (4t - 3y - 6)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$

8. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+4y+5}{x-2y-1}$ $\qquad y|_{x=2} = 1$

9. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x^2-1}{y^2+1}$ $\qquad y(-1) = 1$

10. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2ty = 2t^3\sqrt{y}$ $\qquad y(0) = 25$

11. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x^3 - 2y}{x}$

12. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{x^2y + y^3}$

13. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x(2y+1)}{y - x^2}$

14. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$

Resolva as seguintes equações de Riccatti, sabendo que $y = y_1(x)$ é uma solução particular:

15. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{y}{x} - y^2 = -\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad y_1(x) = \dfrac{1}{x}$

16. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x}$ $\qquad y_1(x) = \sin x$

Soluções

1. $y = \operatorname{arcsen}\sqrt{\dfrac{2}{1+t^2}}$

2. $y = t^2 - 2t + 3$

3. $x = 2\left\{\arctan\left[\sqrt{3}\tan\left(\dfrac{y\sqrt{3}}{2}\right)\right] - y\right\}$

4. $\ln\left|y^2 - ty + 2t^2\right| = c - \dfrac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\dfrac{2y-t}{t\sqrt{7}}\right)$

5. $x^2 + 2xy + 2y^2 = 34$

6. $y^2 + \mathrm{e}^x \sin y = c$

7. $t + 15 = (t - y - 7)\big(c + 3\ln|t - y - 7|\big)$

8. $\dfrac{(y + x/2 + 3/2)^2}{(y + x + 2)^3} = 0{,}098$

9. $y^3 + 3y - x^3 + 3x = 2$

10. $y = \left(t^2 - 2 + 7\mathrm{e}^{-t^2/2}\right)^2$

11. $y = \dfrac{c}{x^2} + \dfrac{x^3}{5}$

12. $(x^2 + y^2 + 1)\mathrm{e}^{-y^2} = c$

13. $x^2 + 2x^2y - y^2 = c$

14. $x^3 + y^3 - 3xy = c$

15. $y_1 = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{x^2 + 2c}$ $\qquad$ $y_2 = \dfrac{1}{x}$

16. $y_2 = \sin x + \dfrac{2}{c\cos x - \sin x}$ $\qquad$ $y_2 = \sin x$

3 Aplicações das equações de primeira ordem

1. A análise química de uma viga de pinho retirada da tumba dum faraó Egipcio mostrou que o conteúdo de carbono 14 é 55% do existente num pinheiro vivo. Sabendo que a meia-vida do carbono 14 é 5580 ± 45 anos, calcule a idade da tumba.

2. Segundo o *Factbook* da C.I.A., os dados demográficos para Portugal em Julho de 1993 foram os seguintes: população = 10 486 140 habitantes, taxa anual de natalidade = 11,59 por mil, taxa anual de mortalidade = 9,77 por mil e taxa anual de migração = 1,8 por mil. Admitindo que as três taxas permanecem constantes entre 1993 e 1997, faça uma estimativa da população de Portugal em Julho de 1997.

3. No problema anterior admita que as taxas de natalidade e migração sejam constantes até ao ano 2000, enquanto a taxa de mortalidade é directamente proporcional à população (modelo logístico). Calcule qual seria neste modelo a população em Julho do ano 2000 (a constante de proporcionalidade da taxa de mortalidade calcula-se fácilmente a partir dos dados iniciais).

4. A intensidade luminosa num lago ou no mar diminui exponencialmente em função da profundidade, como resultado da absorção da luz por parte da água. Se 7,6 metros de água absorvem 15% da intensidade da luz incidente na superfície, a que profundidade seria a luz do meio dia tão intensa como a luz da lua cheia sobre a Terra? (a luz da lua cheia sobre a Terra é 300 000 vezes mais fraca que a luz do sol a meio dia).

5. Numa reacção química de segunda ordem dois reagentes A e B combinam-se formando um composto C ($\mathrm{A}+\mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$). Cada molécula de A tem uma probabilidade de reagir com B (por unidade de tempo) directamente proporcional ao número de moléculas de B existentes: probabilidade $= cN_{\mathrm{B}}$, em que c é uma constante e N_{B} o número de moléculas de B. Assim o número médio de reacções por unidade de tempo é $cN_{\mathrm{A}}N_{\mathrm{B}}$, sendo N_{A} e N_{B} o número de moléculas de A e B existentes nesse instante.

(a) Demonstre que em qualquer instante a concentração x do composto C (em moles por unidade de volume) verifica a seguinte equação

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)(b-x)$$

onde a e b são as concentrações iniciais de A e B, no instante $t=0$ quando a concentração de C é zero, e k é uma constante (admita o volume constante).

(b) Encontre a solução da equação anterior para a constante k e a concentração x.

(c) Quando a concentração de um dos reagentes é muito maior, por exemplo $a \gg b$, o termo $a-x$ permanece práticamente constante e muito perto do valor inicial a. Resolva a equação diferencial com a dita aproximação.

(d) Resolva a equação diferencial da alínea a no caso particular de concentrações iguais para os dois reagentes ($a=b$).

6. Encontre as trajectórias ortogonais da familia de elipses $4x^2 + y^2 = c$.

7. A constante de tempo (inversa da constante de transferência térmica k) de um prédio é $1/k = 1$ dia. Não existem sistemas de aquecimento ou ar condicionado dentro do prédio. A temperatura exterior oscila em forma senoidal entre o mínimo de 5 °C às 2 horas e o máximo de 25 °C às 14 horas.

(a) Encontre a equação diferencial para a temperatura dentro do prédio. (sugestão: use o tempo t em dias, com origem num dia qualquer às 8 horas quando a temperatura externa tem o valor médio)

(b) Encontre a solução de **estado estacionário** (valores elevados de t).

(c) Quais serão as temperaturas máxima e mínima dentro do prédio?

Soluções

1. (4813 ± 39) anos

2. 10 639 084 habitantes

3. 10 746 263 habitantes

4. 590 m

5. (b) $k = \dfrac{1}{t(a-b)} \ln \left| \dfrac{b(a-x)}{a(b-x)} \right|$; $\qquad x = a \dfrac{1 - \exp\left[kt(a-b)\right]}{1 - (a/b)\exp\left[kt(a-b)\right]}$

(c) $k = \dfrac{1}{at} \ln \left| \dfrac{b}{b-x} \right|$

(d) $k = \dfrac{x}{at(a-x)}$

6. $y^4 = cx$

7. (a) $T' + T = 15 + 10\sin(2\pi t)$

(b) $T_{\text{ee}} = 15 + \dfrac{10}{1+4\pi^2}\left[\sin(2\pi t) - 2\pi\cos(2\pi t)\right]$

(c) $T_{\text{mín}} = 15 - \dfrac{10}{\sqrt{1+4\pi^2}} = 13{,}4$ °C; $\quad T_{\text{máx}} = 15 + \dfrac{10}{\sqrt{1+4\pi^2}} = 16{,}6$ °C

4 Equações lineares de ordem 2 e superior

1. **Forma normal**. Demonstre que a substituição $y(x) = u(x)F(x)$, onde

$$F(x) \equiv \exp\left(-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx\right)$$

transforma qualquer equação linear homogénea de segunda ordem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

na chamada *forma normal*:

$$u'' + g(x)u = 0$$

Redução da ordem. Mostre que a função $y_1(x)$ é solução da equação diferencial e determine a solução geral

2. $y'' + \dfrac{2y'}{x} + y = 0$ $\qquad y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$
3. $xy'' - 2(x+1)y' + 4y = 0$ $\qquad y_1 = \mathrm{e}^{2x}$
4. $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ $\qquad y_1 = x$

Resolva os seguintes problemas de valores iniciais

5. $y'' + 3y' + 2y = 0$ $\qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
6. $y'' - a^2y = 0$ $\qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
7. $y'' - 4y' + 13y = 0$ $\qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
8. $16y'' - 8y' + y = 0$ $\qquad y(1) = 0, \quad y'(1) = \sqrt[4]{\mathrm{e}}$
9. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ $\qquad y(2) = 1, \quad y'(2) = 2$
10. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$ $\qquad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2$
11. $(x-1)^2y'' - 4(x-1)y' + 4y = 0$ $\qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3$

Resolva os seguintes problemas de condições fronteira

12. $y'' - 16y = 0$ $\qquad y(0) = 3, \quad y(1/4) = 3\mathrm{e}$
13. $y'' + y = 0$ $\qquad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0$

Encontre a solução geral das seguintes equações

14. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$
15. $x^3y''' - 2x^2y'' - xy' + 9y = 0$

Soluções

2. $y = \dfrac{1}{x}(c_1 \sin x + c_2 \cos x)$

3. $y = c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2(2x^2 + 2x + 1)$

4. $y = c_1 x + c_2(x^2 - 1)$

5. $y = 2\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}$

6. $y = \cosh(ax)$

7. $y = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{2x} \sin(3x)$

8. $y = (x-1)\mathrm{e}^{x/4}$

9. $y = \dfrac{3}{4}x^2 - x$

10. $y = \dfrac{\sin(2 \ln |x|)}{x}$

11. $y = x - 1 + (x-1)^4$

12. $y = 3\mathrm{e}^{4x}$

13. Não existe solução

14. $y = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{x} + c_3 \mathrm{e}^{2x}$

15. $y = \dfrac{c_1}{x} + x^3(c_2 + c_3 \ln |x|)$

5 Equações lineares não-homogeneas

Encontre a solução geral das seguintes equações pelo método de coeficientes indeterminados

1. $y'' + y' - 2y = 3 - 6x$

2. $y'' - y = x \sin x$

3. $y'' - 4y' + 4y = x\mathrm{e}^{2x}$

Encontre a solução geral das seguintes equações pelo método de variação de parâmetros

4. $y'' + y' = \mathrm{e}^{-x}$

5. $y'' + 4y = \tan(2x)$

6. $x^2 y'' + xy' - 4y = x^2 + x^4$

Sabendo que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentes da equação homogénea correspondente, encontre uma solução particular da equação não-homogénea

7. $(1 - x)y'' + xy' - y = 2(x - 1)^2\mathrm{e}^{-x}$ $\qquad y_1 = x, \quad y_2 = \mathrm{e}^x$

8. $y'' + \dfrac{y'}{x} + \left(1 - \dfrac{1}{4x^2}\right) y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad y_1 = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad y_2 = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$

Soluções

1. $y = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-2x} + 3x$

2. $y = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{1}{2}(x \sin x + \cos x)$

3. $y = \left(c_1 + c_2 x + \dfrac{x^3}{6}\right) \mathrm{e}^{2x}$

4. $y = c_1 + (c_2 - x)\mathrm{e}^{-x}$

5. $y = c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x) - \dfrac{1}{4} \cos(2x) \ln \left| \dfrac{\tan x + 1}{\tan x - 1} \right|$

6. $y = c_1 x^2 + \dfrac{c_2}{x^2} + \dfrac{x^2}{4} \ln |x| + \dfrac{x^4}{12}$

7. $y_p = \left(\dfrac{1}{2} - x\right) \mathrm{e}^{-x}$

8. $y_p = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

6 Equações de diferenças, lineares homogéneas

Resolva as seguintes equações de diferenças

1. $y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = 0$ $\quad y_0 = 1, \quad y_1 = 0$

2. $y_{n+2} + 6y_{n+1} + 9y_n = 0$ $\quad y_0 = 1, \quad y_1 = 1$

3. $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 13y_n = 0$ $\quad y_0 = 0, \quad y_1 = 1$

4. $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = 0$ $\quad y_0 = 0, \quad y_1 = 1$

5. $\mathrm{e}^{n+2}y_{n+2} - 5\mathrm{e}^{n+1}y_{n+1} + 6\mathrm{e}^n y_n = 0$

6. $(n+1)y_{n+1} - (n-3)y_n = 0$ $\quad y_0 = 1$

7. $(n+1)(n+2)y_{n+2} - (n+3)y_n = 0$ $\quad y_0 = 2, \quad y_1 = 1$

8. $y_{n+3} + 8y_n = 0$ $\quad y_0 = 1, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 0$

9. $y_{n+3} - (n+1)y_n = 0$

10. A sucessão $\{F_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$, em que cada termo é igual à soma dos dois anteriores, é chamada *sucessão de Fibonacci*.

(a) Escreva a equação de diferenças e os valores iniciais que definem a sucessão de Fibonacci.

(b) Demonstre que $\phi \equiv (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$ e $-1/\phi$ são raízes do polinómio característico da equação encontrada na alínea anterior.

(c) Calcule o termo geral F_n da sucessão de Fibonacci e demonstre que F_{n+1}/F_n é igual a ϕ no limite $n \longrightarrow \infty$. O número ϕ representava na tradição grega a relação perfeita que deveria existir entre os lados de um rectângulo para se obter o melhor efeito estético (**relação áurea**).

Soluções

1. $\{y_n\} = \{1, 0, -2, 6, \ldots\}$ $\quad y_n = (-1)^n(2 - 2^n)$

2. $\{y_n\} = \{1, 1, -15, 81, \ldots\}$ $\quad y_n = (-3)^n \left(1 - \frac{4}{3}n\right)$

3. $\{y_n\} = \{0, 1, 4, 3, \ldots\}$ $\quad y_n = \frac{(\sqrt{13})^n}{3} \sin\left[n \arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right]$

4. $\{y_n\} = \{0, 1, 2, 0, \ldots\}$ $\quad y_n = \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

5. $y_n = \mathrm{e}^{-n}(c_1 2^n + c_2 3^n)$

6. $\{y_n\} = \{1, -3, 3, -1, 0, 0, \ldots\}$ $\quad y_n = \begin{cases} \dfrac{6(-1)^n}{n!(3-n)!} & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & 3 < n \end{cases}$

7. $\{y_n\} = \{2, 1, 3, 2/3, 5/4, \ldots\}$ $\quad y_{2m} = \frac{4m+2}{2^m m!} \quad y_{2m+1} = \frac{2^m(m+1)!}{(2m+1)!}$

8. $\{y_n\} = \{1, 1, 0, -8, -8, 0, \ldots\}$ $\quad y_{3m} = (-8)^m \quad y_{3m+1} = (-8)^m \quad y_{3m+2} = 0$

9. $y_{3m} = c_1 3^m\, \Gamma\left(m + \frac{1}{3}\right) \quad y_{3m+1} = c_2 3^m\, \Gamma\left(m + \frac{2}{3}\right) \quad y_{3m+2} = c_3 3^m m!$

10. (a) $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0 \qquad F_0 = F_1 = 1$

    (c) $F_n = \frac{1}{\phi + 2}\left[\phi^{n+2} + (-1)^n \phi^{-n}\right]$

7 Método das séries

Resolva, usando o método das séries, as seguintes equações diferenciais. Compare os resultados com as respectivas soluções analíticas

1. $(1-x^2)y' - 2xy = 0$

2. $y' - y = 1 + x^2$

3. $y'' - 3y' + 2y = 0$

4. $y'' - y = x$

Determine a solução das seguintes equações diferenciais lineares de segunda ordem

5. $y'' - xy' + y = 0$

6. $y'' + xy = 0$

7. $x(1-x)y'' + \dfrac{1+x}{2}y' - \dfrac{1}{2}y = 0$

8. $xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0$

9. $(1+x)x^2y'' - (1+2x)xy' + (1+2x)y = 0$

10. $x(x-1)y'' + (4x-2)y' + 2y = 0$

11. $y'' + x^2y = 0$ $\qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

Nos problemas 12 e 13, n é um parâmetro inteiro positivo. Demostre que para cada valor de n existe um polinómio de grau n que é solução particular da equação e determine a forma geral do polinómio de grau n com as condições fronteira dadas

12. Equação de Laguerre

$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$ $\qquad$ Polinómios de Laguerre $L_n(x), L_n(0) \equiv 1$

13. Equação de Hermite

$y'' - 2xy' + 2ny = 0$ $\qquad$ Polinómios de Hermite $H_n(x)$

(a) Para n par use a condição $H_{2m}(0) = (-1)^m \dfrac{(2m)!}{m!}$

(b) Para n impar use a condição $H'_{2m+1}(0) = (-1)^m \dfrac{2(2m+1)!}{m!}$

Soluções

1. $y = c\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \dfrac{c}{1-x^2}$

2. $y = c\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} - x^2 - 2x - 3 = ce^x - x^2 - 2x - 3$

3. $y = c_1\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} + c_2\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2x)^n}{n!} = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

4. $y = c_1\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + c_2\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - x = c_1\cosh x + c_2\sinh x - x$

5. $y = c_1 x + c_2\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{2^n n!(2n-1)}\right]$

6. $y = c_1\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 3^n\,\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)}{(3n)!}x^{3n} + c_2\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 3^n\,\Gamma\left(n+\frac{2}{3}\right)}{(3n+1)!}x^{3n+1}$

7. $y = c_1(1+x) + c_2\sqrt{x}$

8. $y = e^x(c_1 + c_2\ln x)$

9. $y = c_1 x + c_2(x^2 + x\ln x)$

10. $y = \dfrac{c_1}{x} + \dfrac{c_2}{1-x}$

11. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{16^n n!\,\Gamma\left(n+\frac{3}{4}\right)}x^{4n}$

12. $L_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \dfrac{(-1)^m n!}{(n-m)!\,m!\,m!}x^m$

13. (a) $H_{2m}(x) = \sum_{k=0}^{m} \dfrac{(-1)^{m+k}(2m)!}{(m-k)!(2k)!}(2x)^{2k}$

(b) $H_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^{m} \dfrac{(-1)^{m+k}(2m+1)!}{(m-k)!(2k+1)!}(2x)^{2k+1}$

8 Transformadas de Laplace

Aplicando transformadas de Laplace, resolva as seguintes equações

1. $y'' + y' - 2y = 3$ $\qquad y(0) = 0, y'(0) = 1$

2. $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2t}$ $\qquad y(0) = 0, y'(0) = 0$

3. $y''' - 4y'' - y' + 4y = \mathrm{e}^{t}$ $\qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$

4. $y'' + y = \mathrm{e}^{2t} \cos t$ $\qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$

5. $y'' + 4y = t \sin(2t)$ $\qquad y(0) = y(\pi/4) = 0$

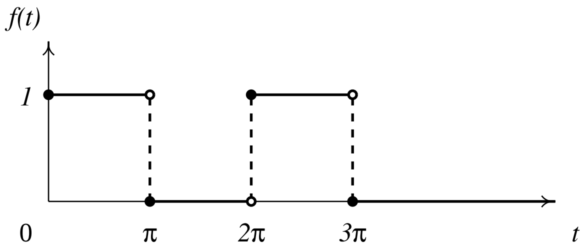
6. $t^2 y'' - 2y = 2t$ $\qquad y(0)$ finita, $y(2) = 2$

Nas perguntas 7 a 10 resolva o problema de condições fronteira

$$y'' + 4y = f(t) \qquad y(0) = y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 0$$

usando a definição da função $f(t)$ dada em cada caso

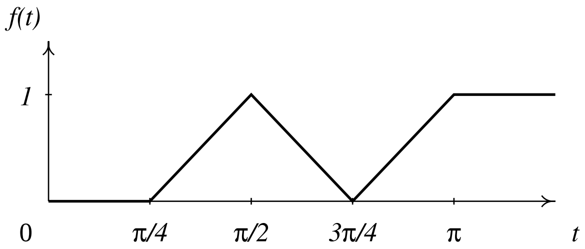
7.



8. $f(t) = \delta(t - \pi)$

9. $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \pi \\ 0 & \pi \le t < 2\pi \\ \sin t & 2\pi \le t \end{cases}$

10.



Calcule os seguintes produtos de convolução

11. $\mathrm{e}^{at} * \mathrm{e}^{at}$

12. $t * t * t$

13. $t * \sin t$

Usando a propriedade da transformada de Laplace do produto de convolução, calcule as transformadas inversas das seguintes funções

14. $\dfrac{4}{s^2(s-2)}$

15. $\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$

Resolva as sequintes equações em forma geral, para qualquer função $f(t)$ parcelarmente contínua e parâmetro k diferente de zero

16. $y'' - k^2 y = f(t)$ $\qquad y(0) = y'(0) = 0$

17. $y'' - 2ky' + k^2 y = f(t)$ $\qquad y(0) = y'(0) = 1$

Equações integrodiferenciais. Resolva as seguintes equações

18. $y(t) = a \sin t - 2 \int_0^t y(s) \cos(t-s)\, ds$

19. $y(x) = x + \int_0^x y(t) \cos(x-t)\, dt$

20. $\int_0^t y(s)\, ds - y'(t) = t$ $\qquad y(0) = 2$

21. $y'(t) + 2y + \int_0^t y(s)\, ds = \sin t$ $\qquad y(0) = 1$

Soluções

1. $y = \dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-2t} + \dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{t} - \dfrac{3}{2}$

2. $y = \dfrac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-2t}$

3. $y = \dfrac{1}{45}\mathrm{e}^{4t} - \dfrac{1}{20}\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{1}{36}(37-6t)\mathrm{e}^{t}$

4. $8y = 7\cos t - 3\sin t + \mathrm{e}^{2t}(\cos t + \sin t)$

5. $y = \dfrac{t}{16}(\sin(2t) - 2t\cos(2t)) - \dfrac{\pi}{64}\sin(2t)$

6. $y = t^2 - t$

7. $y = \dfrac{1}{4}(1-\cos(2t))\,[u(t) - u(t-\pi) + u(t-2\pi) - u(t-3\pi)]$

8. $y = \dfrac{1}{2}\sin[2(t-\pi)]u(t-\pi) - \dfrac{1}{2}\sin(2t)$

9. $y = \dfrac{1}{4}(1-\cos(2t))[u(t) - u(t-\pi)] + \dfrac{1}{6}(2\sin t - \sin(2t))u(t-2\pi)$

10. $$2\pi y = -\left[2t - 2\pi - \sin(2t)\right] u(t-\pi) + \left[4t - 3\pi - 2\cos(2t)\right] u\left(t - \frac{3\pi}{4}\right)$$
$$-2\left[2t - \pi + \sin(2t)\right] u\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \left[2t - \pi/2 + \cos(2t)\right] u\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$+\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\sin(2t)u(t)$$

11. $t\mathrm{e}^{at}$

12. $\dfrac{t^5}{5!}$

13. $t - \sin t$

14. $\mathrm{e}^{2t} - 2t - 1$

15. $\dfrac{1}{2\omega^3}[\sin(\omega t) - \omega t\cos(\omega t)]$

16. $y = \dfrac{1}{k}\int_0^t \cosh[k(t-s)]f(s)\,ds$

17. $y = \mathrm{e}^{kt}\left[1 + (1-k)t + \int_0^t (t-s)\mathrm{e}^{-ks}f(s)\,ds\right]$

18. $y = at\mathrm{e}^{-t}$

19. $y = 1 + t + \mathrm{e}^{t/2}\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right]$

20. $y = 1 + \cosh t$

21. $y = \dfrac{1}{2}\sin t + \mathrm{e}^{-t}\left(1 - \dfrac{3}{2}t\right)$

9 Equações de diferenças lineares não-homogéneas e não-lineares

Resolva as seguintes equações de diferenças

1. $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 1$

2. $y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 3$ $\qquad y_0 = 0, y_1 = 1$

3. $y_{n+2} + 4y_{n+1} + 4y_n = (-2)^n$ $\qquad y_0 = 0, y_1 = 0$

4. $y_{n+1} - 2y_n = \exp(-bn)$

5. $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = 2^n$ $\qquad y_0 = 0, y_1 = 0$

6. $y_{n+2} + 4y_n = \dfrac{1}{3^n}$ $\qquad y_0 = 1, y_1 = 0$

7. $y_{n+2} - y_n = n$

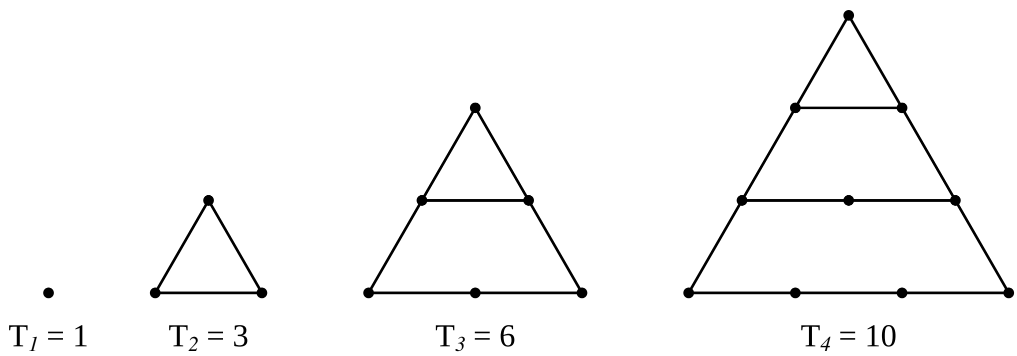
Encontre as transformadas $\mathbb{Z}$ das seguintes sucessões

8. $\{1, 0, 0, \dots\}$ $\qquad y_n = \delta_{n,0}$

9. $\{0, 0, 1, 1, \dots\}$ $\qquad y_n = 1 - \delta_{n,0} - \delta_{n,1}$

10. $y_n = n \sin(\omega n)$

11. Os números $\{T_n\} = \{1, 3, 6, 10, 15, \dots\}$ são chamados *números triangulares*, pois podem ser obtidos geométricamente contando o número de pontos nos triângulos da sequência na figura seguinte



1. Determine o problema de valor inicial que define os números triangulares.
2. Encontre a forma geral T_n de qualquer número triangular.

Nos problemas 12 e 13 encontre uma equação de diferenças para as seguintes somas S_n (compare S_{n+1} com S_n). Resolva a equação de diferenças usando a condição inicial S_1 para obter uma fórmula geral para S_n

12. $S_n = 1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

13. $S_n = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$

14. O sistema iterativo

$$x_{n+1} = x_n^2 + c \qquad x_0 = 0$$

é um sistema caótico. Usando valores de c igual a -1.3, -1.75 e -2 calcule alguns termos da sequência $\{x_n\}$ até obter um valor repetido; qual é o período da sequência em cada caso? que pode concluir a partir destes resultados? Se quiser escrever um programa de computador para encontrar o diagrama de bifurcação, use valores de c entre -2 e 0.25, e tenha em conta que os valores resultantes de x_n estão comprendidos entre -2 e 2.

Soluções

1. $y_n = y_0 (2 - 2^n) + y_1 (2^n - 1) + 2^n - n - 1$

2. $y_n = n$

3. $y_n = \dfrac{(-1)^n}{8} n(n-1)2^n$

4. $y_n = 2^n \left(y_0 + \dfrac{1}{2 - \mathrm{e}^{-b}} \right) - \dfrac{\mathrm{e}^{-bn}}{2 - \mathrm{e}^{-b}}$

5. $y_n = \dfrac{2^n}{4} \left[1 - \cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right) \right]$

6. $y_{2m} = \dfrac{1}{37} \left[28(-4)^m + \dfrac{9}{9^m} \right] \qquad y_{2m+1} = -\dfrac{3}{37} \left[(-4)^m + \dfrac{1}{9^m} \right]$

7. $y_{2m} = y_0 + m(m-1) \qquad y_{2m+1} = y_1 + m^2$

8. $\overline{y}(z) = 1$

9. $\overline{y}(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$

10. $\overline{y}(z) = \dfrac{z(z^2-1)\sin\omega}{(z^2 - 2z\cos\omega + 1)^2}$

11.
   1. $T_{n+1} - T_n = n + 1 \qquad T_1 = 1$
   2. $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

12. $S_n = T_n^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

13. $S_n = n(n+1)$

14. O período é 4, 3 e 1 respectivamente. Existem pontos de bifurcação entre -2 e -1.75, e entre -1.75 e -1.3

10 Sistemas de equações diferenciais lineares

Resolva os seguintes problemas de valores iniciais pelo método da eliminação

1. $\begin{cases} x' = y - x \\ y' = y - 2\sin t \end{cases}$ $\qquad\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = y - x \\ y' = y - 2x + \sin t \end{cases}$ $\qquad\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = z \\ y' = x \\ z' = y \end{cases}$ $\qquad\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = -1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$

Nos problemas seguintes calcule a matriz $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$ e use o resultado para encontrar a solução do problema de valor inicial

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

8. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

9. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

10. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

11. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Soluções

1. $x = \sin t \qquad y = \cos t + \sin t$

2. $x = \dfrac{1}{2}(\sin t - t\cos t) \qquad y = \dfrac{1}{2}(\sin t - t\cos t + t\sin t)$

3. $$\begin{cases} x = \dfrac{2\mathrm{e}^{-t/2}}{\sqrt{3}} \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right) \\[2ex] y = -\mathrm{e}^{-t/2} \left[\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right] \\[2ex] z = \quad \mathrm{e}^{-t/2} \left[\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right] \end{cases}$$

4. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{t} \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} - e^{3t} \\ \mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos(2t) + 7\sin(2t) \\ 2\cos(2t) - 6\sin(2t) \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{x} = \mathrm{e}^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + 2\cos(2t) + \dfrac{1}{2}\sin(2t) \\ \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2t) + 2\sin(2t) \end{bmatrix}$

8. $\mathbf{x} = \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 + t \\ 1 \end{bmatrix}$

9. $\mathbf{x} = \mathrm{e}^{-t} \begin{bmatrix} -t \\ 1 \\ \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}$

10. $\mathbf{x} = \dfrac{1}{5} \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-10t} + 3\mathrm{e}^{5t} \\ 5\mathrm{e}^{5t} \\ -\mathrm{e}^{-10t} + 6\mathrm{e}^{5t} \end{bmatrix}$

11. $\mathbf{x} = \mathrm{e}^{t} \begin{bmatrix} \cos(4t) - \sin(4t) \\ \sin(4t) + \cos(4t) \\ 2\mathrm{e}^{t} - 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

11 Sistemas de equações diferenciais lineares não-homogéneos

Com as matrizes dadas em cada caso resolva o problema de valor inicial

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{f} = \mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta(t-\pi) \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{f} = \mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 - u(t-1) \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Soluções

1. $\mathbf{x} = \dfrac{1}{48} \begin{bmatrix} -3 - 12t + 16\mathrm{e}^t + 35\mathrm{e}^{4t} \\ -3 - 12t - 32\mathrm{e}^t + 35\mathrm{e}^{4t} \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{x} = \mathrm{e}^t \begin{bmatrix} t + \dfrac{t^2}{2} \\ 1 + t \\ \dfrac{t^2}{2} \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sin(2t) + \cos(2t) - u(t-\pi)\sin(2t) \\ 2\sin(2t) + u(t-\pi)[\cos(2t) - \sin(2t)] \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{x} = \dfrac{t\mathrm{e}^t}{6} \begin{bmatrix} 6t - t^2 \\ 3t \\ 6 + 6t + t^2 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{x} = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 - 4\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t} - u(t-1)(3 - 4\mathrm{e}^{1-t} + \mathrm{e}^{2-2t}) \\ 2 - 4\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t} - u(t-1)(2 - 4\mathrm{e}^{1-t} + 2\mathrm{e}^{2-2t}) \end{bmatrix}$

12 Equações de derivadas parciais e transformadas de Fourier

Encontre a solução geral $u(x, y)$ das seguintes equações

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y$

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 + y^2$

Utilizando transformadas de Laplace, resolva as seguintes equações de derivadas parciais

4. $\dfrac{\partial v}{\partial t} + 2\dfrac{\partial v}{\partial x} = -v$ $\quad (t > 0) \quad (x > 0)$

$v(x, 0) = 0 \qquad v(0, t) = \begin{cases} 2t & t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$

5. $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$ $\quad (t > 0) \quad (x > 0)$

$v(0, t) = \sin t \qquad \lim_{x\to\infty} v(x, t) = 0 \qquad v(x, 0) = \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

6. $\dfrac{\partial u}{\partial t} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} = xt$ $\quad (t > 0) \quad (x > 0)$

$u(x, 0) = 0 \qquad u(0, t) = 0$

Encontre as séries de Fourier seno e co-seno das seguintes funções

7. $f(x) = 1 \qquad 0 < x < \pi$

8. $f(x) = 1 - x \qquad 0 < x < 1$

Resolva as seguintes equações

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad (0 < x < 1) \quad (t > 0)$

$u(0, t) = u(1, t) = 0 \qquad u(x, 0) = 5\sin(3\pi x) \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

10. $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ $\quad (0 < x < 1) \quad (t > 0)$

$u(x, 0) = x^2 \qquad u(1, t) = 1 \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 1$

11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{-x}$ $\quad (0 < y < 1) \quad (x > 0)$

$u(x, 0) = u(0, y) = 1 \qquad u(x, 1) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} u(x, y)$ finito

Soluções

1. $u(x,y) = xy + f(y)$, onde f é qualquer função de y derivável

2. $u(x,y) = f(x) + g(y)$, onde f e g são funções de x e y, ambas deriváveis nas respectivas variáveis

3. $u(x,y) = \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{3}xy^3 + f(x) + g(y)$, onde f e g são funções de x e y, ambas deriváveis nas respectivas variáveis

4. $v(x,t) = 2\mathrm{e}^{-x/2}\left(t - \frac{x}{2}\right)\left[u\left(t - \frac{x}{2}\right) - u\left(t - 1 - \frac{x}{2}\right)\right]$

5. $v(x,t) = \sin\left(t - \frac{x}{c}\right) u\left(t - \frac{x}{c}\right)$

6. $u(x,t) = x\left(t - 1 + \mathrm{e}^{-t}\right)$

7. $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$ Série co-seno: $f(x) = 1$

8. $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin(n\pi x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left[(2n-1)\pi x\right]$

9. $u(x,t) = 5\sin(3\pi x)\cos(3\pi t)$

10. $u(x,t) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_n^2} - \mathrm{e}^{-\alpha^2\lambda_n^2 t}\left(\frac{1}{\lambda_n^2} - \frac{2(-1)^n}{\lambda_n^3}\right)\right]\cos(\lambda_n x)$
em que $\lambda_n = (n + 1/2)\pi$

11. $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left[1 + \frac{1-(-1)^n n^2\pi^2}{n^2\pi^2 - 1}\mathrm{e}^{-n\pi x} - \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2 - 1}\mathrm{e}^{-x}\right]\sin(n\pi y)$